ECOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES D'ALES
1976

PROBLEME I

Soit E l'ensemble des fonctions numériques f, de la variable réelle x :

a) définies, continues pour x positif, nulles pour x strictement négatif,

b) telles que quel que soit t, réel, strictement positif,

$$\lim_{x \to +\infty} \left[e^{-tx} . f(x) \right] = 0$$

1) Démontrez que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $[0, +\infty[$.

Calculer : $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \, dx$

2) A toute fonction f de E on associe par la transformation L son image : $F = L(f)$ avec :

$$F(t) = [L(f)](t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} . f(x) \, dx$$

a) montrer que cette intégrale est absolument convergente quel que soit t strictement positif. (On pourra considérer le réel t_o , tel que : $0 < t_o < t$

et écrire : $\int_0^{+\infty} e^{-xt} . f(x) \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(t-t_o)x} . e^{-t_o x} . f(x) \, dx$)

b) montrer que L est linéaire.

3) Vérifier que les fonctions f_1, f_2, f_3, définies pour x positif par :

$$f_1(x) = x \, , \quad f_2(x) = \sin a x, \quad f_3(x) = \cos a x$$

nulles pour x strictement négatif appartiennent à E et déterminer leurs images F_1, F_2, F_3 par L. (a réel).

4) Soit G le sous-ensemble de E, formé par les fonctions f, deux fois dérivables, et dont les dérivées (f' et f'') appartiennent à E.

a) montrer que G est un sous espace vectoriel de E ;

b) montrer que f_1, f_2, f_3 appartiennent à G ;

c) montrer : $[L(f')](t) = t[L(f)](t) - f(0)$;

d) retrouver, en utilisant cette relation, l'image de f_3 connaissant celle de f_2 ;

e) déduire de c) , $[L(f'')](t)$ en fonction de t, $F(t)$, $f(0)$, $f'(0)$.

5) On considère l'équation différentielle :

$$f''(x) + f(x) - x = 0 \, , \; f(0) = 0 \, , \; f'(0) = 2$$

En utilisant la transformation L, déterminer la fonction F image de f.

6) En supposant L injective, déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$

7) En utilisant la méthode classique d'intégration des équations différentielles, retrouver le résultat de la question précédente.

PROBLEME II

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On définit un endomorphisme de E par : $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$; $f(\vec{e}_2) = a\,\vec{e}_2 + b\vec{e}_3$

$f(\vec{e}_3) = b\,\vec{e}_2 + a\,\vec{e}_3$; a et b désignant deux nombres réels tels que $a^2 - b^2 = 1$.

1) a) Déterminer la matrice F de f relative à la base B.
Calculer le déterminant de F. Conclure que f est un automorphisme de E. Construire F^{-1}.

b) Soit $\mathcal{M}$ le groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre 3 inversibles. Montrer que lorsque a et b varient (avec $a^2 - b^2 = 1$) F décrit un sous-groupe commutatif de $\mathcal{M}$.

c) Soit i l'application identique de E dans E. Trouver l'image et le noyau de f - i. Quels sont les vecteurs invariants de f ?

d) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des endomorphismes f de matrice F associée lorsque a et b varient (avec toujours $a^2 - b^2 = 1$). $\mathcal{F}$ est-il un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse. Quelle est la structure de $\mathcal{F}$ muni de la loi de composition des applications.

II) Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on appelle trace de A et on note tr (A) le réel $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$; c'est à dire la somme des éléments diagonaux de A.

a) Montrer que l'application $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

b) Montrer que A et B désignant deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$tr(A\,B) = tr(B\,A)$$

En déduire que si X et Y sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant le même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ par rapport à des bases différentes alors tr X = tr Y.

III) On pose $a = \operatorname{ch} t$ et $b = \operatorname{sh} t$ et on désigne par F (t) la matrice correspondante à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ où t est un paramètre réel. On considère les matrices suivantes :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

les matrices B_1 et B_2 peuvent-elles être semblables à F (t)? Justifier les réponses.

Sachant que la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à F (t)

déterminer une valeur de t (soit t_o) et une matrice P inversible telle que :

$$D = P^{-1} F(t_o) P$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail